

信号処理論 演習問題

[関数の正規直交性]

1. 以下の問いに答えなさい

(a) 次の関数の集合は区間 $[-L, L]$ で直交系をなすことを示しなさい

$$1, \sin \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{2\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \dots, \sin \frac{n\pi x}{L}, \cos \frac{n\pi x}{L}, \dots$$

(略)

(b) 上記の関数群を正規化しなさい

(テキスト (1.6) 式参照)

2. 次の関数の集合が $[-1, 1]$ で直交系をなすことを示しなさい

$$1, x, \frac{3x^2-1}{2}, \frac{5x^3-3x}{2}$$

[フーリエ級数展開]

3. 以下の問いに答えなさい

(a) $f(t)$ のフーリエ係数を求めなさい

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-5 < t < 0) \\ 3 & (0 < t < 5) \end{cases}$$

$$(a_0 = 3, a_n = 0, b_n = \frac{3(1 - \cos \pi x)}{n\pi})$$

(b) 上記の結果を用いて、 $f(t)$ のフーリエ級数を求めなさい

$$(f(t) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}(\sin \frac{\pi t}{5} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi t}{5} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi t}{5} + \dots))$$

4. $f(t) = t^2 (0 < t < 2\pi)$ をフーリエ級数に展開しなさい

$$(f(t) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{4}{n^2} \cos nt - \frac{4\pi}{n} \sin nt))$$

5. $f(t)$ をフーリエ級数に展開しなさい

$$f(t) = \begin{cases} 2-t & (0 < t < 4) \\ t-6 & (4 < t < 8) \end{cases}$$

$$(\frac{16}{\pi}(\cos \frac{\pi t}{4} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi t}{4} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi t}{4} + \dots))$$

6. 以下の問いに答えなさい

(a) $f(t)$ をフーリエ級数に展開しなさい

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t < \pi) \\ 0 & (\pi \leq t < 2\pi) \end{cases}$$

$$(a_0 = 1, a_n = 0, b_{2n-1} = \frac{2}{2n+1}\pi)$$

(b) 上記の結果をパーセバルの等式に適用しなさい

$$(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8})$$

[フーリエ変換]

7. 次の問いに答えなさい

(a) $f(t)$ をフーリエ変換しなさい

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & (|t| < \epsilon) \\ 0 & (|t| > \epsilon) \end{cases}$$

$$(\frac{\sin \omega \epsilon}{\omega \epsilon})$$

(b) $\epsilon \rightarrow 0+$ とした時の極限を求めなさい

$$(1)$$

8. $f(t)$ をフーリエ変換しなさい

$$f(x) = \begin{cases} 1 - t^2 & (|t| < 1) \\ 0 & (|t| > 1) \end{cases}$$

$$(\frac{4}{\omega^3}(\omega \cos \omega - \sin \omega))$$

9. $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ をフーリエ変換しなさい

$$(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega T})$$

10. 畳み込み積分において、 $(f * g)(t) = (g * f)(t)$ が成立することを示しなさい

(テキスト (1.63) 式参照)

11. 以下の問いに答えなさい

(a) $f(t)$ をフーリエ変換しなさい

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (|t| \leq 1) \\ 0 & (|t| > 1) \end{cases} \quad \left(\frac{\sin \omega}{\omega}\right)$$

(b) 上記の結果をパーセバルの等式に適用しなさい

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega}\right)^2 d\omega = \pi\right)$$

[サンプリング定理]

12. サンプリング定理を簡単に説明しなさい また、サンプリング定理を満たさない長いサンプリング間隔で信号をサンプリングをした場合の問題点を答えなさい。

(テキスト 1.6 節参照)

13. 人の可聴域は年齢とともに狭くなっていく。20代の可聴域は20Hz~16,000Hzと言われている。これより、20代の人々の可聴域で音声を再現できるようにサンプリングする場合、何 Hz より大きなサンプリング周波数が必要となるか答えなさい。また、そのサンプリング周波数を実現するためには、サンプリング間隔はいくらより短くなくてはならないかを答えなさい。

(32,000Hz より大きなサンプリング周波数、 $\frac{1}{32000}$ 秒より短いサンプリング間隔)

[高速フーリエ変換]

14. 今、8 秒間観測される信号に対して、高速フーリエ変換 (FFT) を実行することを考える。サンプリング周波数として 40kHz を採用した場合、高速フーリエ変換への入力として最低いくつのデータ数が必要になるか求めなさい。必要であれば、 $\log_2 40000 \simeq 15.3$ を使いなさい。

(2^{19} 個)